Topologie Algébrique TD2

7, 14 Octobre 2011

2 Espaces Topologiques

Convention : Tous les espaces topologiques sont supposés séparés (=Hausdorff).

Exercice 2.1 (Topologie initiale et topologie finale) Soit X un ensemble, soit $\{Y_i\}_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques.

(a) Pour tout $i \in I$, soit $f_i : X \to Y_i$ une application. La *topologie initiale sur X définie par $\{f_i\}_{i\in I}$* est la topologie la moins fine rendant continues les applications f_i pour tout $i \in I$. Autrement dire, c'est la topologie engendré par $\{f_i^{-1}(U_i) : i \in I, U_i \text{ ouvert de } Y_i\}$.

(b) Pour tout $i \in I$, soit $g_i : Y_i \to X$ une application. La *topologie finale sur X définie par $\{g_i\}_{i\in I}$* est la topologie la plus fine rendant continues les applications g_i pour tout $i \in I$. C'est-à-dire, les ouverts sont les sous-ensembles U de X telles que pour tout $i \in I$, $g_i^{-1}(U)$ soit un ouvert de Y_i.

1. **(Sous-espaces)** Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique X, $\iota : A \to X$ l'inclusion. Décrire la topologie initiale sur A définie par ι.
2. **(Espaces quotients)** Soit X un espace topologique, soit $q : X \to Y$ une application surjective. Décrire la topologie finale sur Y définie par q.
3. **(Propriétés universelles)** Dans la situation (a) ci-dessus, montrer qu'une application $\phi : Z \to X$ est continue si et seulement si toute composition $f_i \circ \phi$ est continue, où Z est un espace topologique quelconque, et X est muni de la topologie initiale. Énoncer et vérifier la propriété universelle de la topologie finale dans la situation (b).
4. **(Produits et coproduits dans $\mathfrak{Top}$)** Soit $\{X_i\}_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Montrer que sur l'ensemble de produit cartésien $\prod_{i\in I} X_i$, la topologie initiale définie par les projections coïncide avec la topologie produite, et qu'il est le produit dans la catégorie $\mathfrak{Top}$. Faire la même chose pour le coproduit $\coprod_{i\in I} X_i$.
5. **(Limites projectives et inductives dans $\mathfrak{Top}$)** Soit I une catégorie petite, soit $X : I \to \mathfrak{Top}$ un foncteur. Montrer que la limite projective de X dans $\mathfrak{Top}$ est la limite projective dans la catégorie des ensembles $\varprojlim_{i\in I} X_i$, munie de la topologie initiale définie par les projections naturelles
$$p_j : \varprojlim_{i\in I} X_i \to X_j.$$
Construire la limite inductive dans $\mathfrak{Top}$ d'un foncteur $X : I \to \mathfrak{Top}$ par la procédure duale.

Terminologies : Dans la catégorie $\mathfrak{Top}$, on souvent appelle la limite projective *la limite*, et la limite inductive *la colimite*.

6. **(Compacité)** On rappelle que le théorème de Tychonoff qui affirme qu'un produit d'espaces topologiques compacts est compact.
(a) Montrer que l'anneau des *entiers p-adique*

$$\mathbf{Z}_p := \varprojlim_{n\in\mathbf{N}_+} \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$$

muni la topologie initiale [1] est compacte.
(b) Soit k un corps. On fixe une clôture séparable k^s, montrer que le groupe de Galois *absolu* de k

$$\mathrm{Gal}(k^s/k) := \varprojlim_{L/k \text{ finie galoisienne}} \mathrm{Gal}(L/k)$$

muni de la topologie initiale [2] est compact.

Indications:

1. C'est la topologie de sous-espace.

2. C'est la topologie d'espace quotient.

4. Pour vérifier qu'il est bien le produit dans la catégorie $\mathfrak{Top}$, on utilise 3. Le coproduit est le union disjoint muni de la topologie finale, on utilise aussi la propriété universelle dans 3.

5. Pour vérifier qu'il est bien la limite projective dans la catégorie, on utilise 3. La limite inductive est la limite inductive dans la catégorie des ensembles munie de la topologie finale.

6. Les deux petites questions se déduisent du fait que la topologie initiale sur la limite projective coïncide à la topologie de sous-espace fermé induite de la topologie produite sur $\prod_i X_i$, qui est compact par le théorème de Tychonoff.

Exercice 2.2 (Topologie Compacte-ouverte) Soient X et Y deux espaces topologiques, on note $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}}(X,Y)$ l'ensemble des applications continues de X vers Y. Pour toute partie compacte K de X et tout ouvert U de Y, on définit un sous-ensemble de $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}}(X,Y)$ suivant :

$$W(K,U) := \{f \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}}(X,Y) : f(K) \subset U\}.$$

Alors on appelle la topologie *compacte-ouverte* sur $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}}(X,Y)$ la topologie engendrée par la sous-base $\{W(K,U)\}_{K,U}$. Notons $\mathrm{Map}(X,Y)$ l'espace topologique

1. Les groupes finis $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ sont sous-entendus munis de la topologie discrète.
2. Les groupes finis $\mathrm{Gal}(L/k)$ sont sous-entendus munis de la topologie discrète.

ainsi construit.
Notation : On appelle $\mathrm{Map}(X, Y)$ le **Mor** *interne*, la notations Y^X est aussi souvent utilisée.
Soient X, Y, Z trois espaces topologiques.

1. Si $f : X \times Y \to Z$ est une application continue, montrer que l'application 'adjointe'
$$\begin{array}{rcl} \phi : X & \to & \mathrm{Map}(Y, Z) \\ x & \mapsto & (y \mapsto f(x, y)) \end{array}$$
est continue.
2. Si X est *localement compact*, montrer que l'application d'évaluation $X \times \mathrm{Map}(X, Y) \to Y$ est continue.
3. **(Adjonction)** Si Y est *localement compact*, montrer qu'il existe un homéomorphisme
$$\mathrm{Map}(X \times Y, Z) \simeq \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z)).$$
En particulier, on a une bijection naturelle
$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}}(X \times Y, Z) \simeq \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}}(X, \mathrm{Map}(Y, Z)).$$
En déduire une paire de foncteurs adjoints.

Indications:

La solution de cet exercice est très bien présentée dans la deuxième partie de l'appendice du livre d'Allen Hatcher : *Algebraic Topology*[3], Page 529 - 532.

Exercice 2.3 (Opérations) On va présenter plusieurs opérations qui permettent de construire de nouveaux espaces topologiques pointés à partir d'anciens. Par convention, on omet souvent les points bases dans les notations suivantes.

(a) **(Bouquet)** Soit $(X_i, x_i)_{i \in I} \in \mathfrak{Top}_\bullet$ une famille d'espaces pointés. On rappelle que le *bouquet* de cette famille est construit comme :
$$\bigvee_{i \in I} X_i := \coprod_{i \in I} X_i / \sim,$$
où la relation d'équivalence est $x_i \sim x_j$ pour tout $i, j \in I$.

(b) **(Smash)** Soient (X, x), (Y, y) deux espaces topologiques pointés. On définit le *produit smash* par :
$$X \wedge Y := X \times Y / X \vee Y,$$
où on identifie $X \vee Y$ au sous-espace $X \times \{y\} \cup \{x\} \times Y$ dans $X \times Y$.

3. Une version électronique est disponible sur son page web.
http ://www.math.cornell.edu/ hatcher/AT/ATpage.html

(c) **(Suspension réduite)** Soit (X, x) un espace topologique pointé, on appelle l'espace suivant la *suspension réduite* de X :

$$\sum X := \mathbb{S}^1 \wedge X,$$

où on prend n'importe quel point de $\mathbb{S}^1$, par exemple 1, comme son point base.

(d) **(Espace des lacets)** Si on se donne un espace topologique pointé (X, x), *l'espace des lacets* de (X, x), noté ΩX, est par définition $\mathbf{Map}_\bullet(\mathbb{S}^1, X)$, c'est-à-dire l'ensemble des applications continues pointées de $(\mathbb{S}^1, 1)$ vers (X, x) muni de la topologie compacte-ouverte.

1. Préciser les points bases sur les espaces construits ci-dessus.
2. Vérifier que ces opérations sont bien des foncteurs.
3. Montrer que le bouquet d'une famille d'espaces topologiques pointés est le coproduit de cette famille dans la catégorie $\mathfrak{Top}_\bullet$.
4. **(Adjonction $(\wedge, \mathbf{Map}_\bullet)$)** Soient (X, x), (Y, y), (Z, z) trois espaces topologiques pointés, comme dans l'exercice précédent, on peut définir le $\mathbf{Mor}_{\mathfrak{Top}_\bullet}$ *interne*, noté $\mathbf{Map}_\bullet(-,-)$, comme l'ensemble des applications continues *préservant les points bases*, muni de la topologie compacte-ouverte. Si on suppose de plus que Y est *localement compact*. Montrer qu'on a un homéomorphisme :

$$\mathbf{Map}_\bullet(X \wedge Y, Z) \simeq \mathbf{Map}_\bullet(X, \mathbf{Map}_\bullet(Y, Z)).$$

   En déduire une paire de foncteurs adjoints.
5. **(Adjonction $(\sum, \Omega)$)** Établir l'homéomorphisme suivant :

$$\mathbf{Map}_\bullet(\sum X, Y) \simeq \mathbf{Map}_\bullet(X, \Omega Y).$$

   On en déduire une paire de foncteurs adjoints.
6. **(Distributivité)** Soient (X, x), (Y, y), (Z, z) trois espaces topologiques pointés, on suppose de plus que X est *localement compact*. Établir les distributivités suivantes :

$$X \wedge (Y \vee Z) \simeq (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z).$$

$$\sum (Y \vee Z) \simeq (\sum Y) \vee (\sum Z).$$

   (Indication : on pourrait utiliser l'adjonction qu'on a établi.)
7. **(Associativité)** Soient (X, x), (Y, y), (Z, z) trois espaces topologiques pointés, on suppose de plus qu'ils sont localement compacts. Montrer qu'on a l'associativité :

$$(X \wedge Y) \wedge Z \simeq X \wedge (Y \wedge Z).$$

   Par conséquent, on peut définir le smash produit au moins pour un nombre fini d'espaces pointés :

$$\bigwedge_{i \in I} X_i := \prod_{i \in I} X_i / \bigvee_{i \in I} X_i,$$

où on identifie $\bigvee_{i\in I} X_i$ à un sous-espace de $\prod_{i\in I} X_i$ défini par les inclusions des points bases.

8. Pour tout entier positif $n \in \mathbf{N}$. Montrer l'homéomorphisme

$$\sum \mathbb{S}^n := \mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^n \simeq \mathbb{S}^{n+1}.$$

En déduire :

$$\mathbb{S}^n \wedge \mathbb{S}^m \simeq \mathbb{S}^{m+n}.$$

Indications:

1. Le point base du bouquet est l'image des points bases. Le point base du smash est l'image du bouquet. Le point base de la suspension réduite est définie comme un cas particulier de smash. Le point base de l'espace des lacets est le lacet constant au point base.

3. D'abord, l'union disjoint est le coproduit dans $\mathfrak{Top}$, donc on a un unique morphisme de l'union disjoint vers l'espace de test. Comme les points bases ont le même image par définition, donc ce morphisme se factorise uniquement à travers le bouquet.

4. Grâce à l'adjonction de l'exercice précédent, il suffit de vérifier que sous l'homéomorphe

$$\mathrm{Map}(X \times Y, Z) \simeq \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z)),$$

le sous-espace $\mathrm{Map}_\bullet(X \wedge Y, Z)$ est bien identifié au sous espace $\mathrm{Map}_\bullet(X, \mathrm{Map}_\bullet(Y, Z))$ à droit. C'est une vérification ensembliste très facile.

5. On utilise 4 en prenant $Y = \mathbb{S}^1$, qui est bien localement compact.

6. Le deuxième est un cas particulier du premier. Pour le premier, on utilise le lemme de Yoneda et l'adjonction 4.

7. On utilise encore une fois le lemme de Yoneda et l'adjonction 4.

8. Le premier est élémentaire. Le deuxième est une conséquence immédiate du premier et l'associativité en écrivant $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbb{S}^1$.